MA2115 Matemáticas IV (semi-presencial)
Práctica 05

Boris Iskra

enero – marzo 2010

1 Trayectorias Ortogonales.

1 Trayectorias Ortogonales.

Ejemplo 1

Halle la familia de trayectorias ortogonales a la familia de parábolas

$$y = Cx^2.$$

Derivando obtenemos:

$$y' = 2Cx$$
$$y' = 2\frac{y}{x^2}x$$
$$y' = 2\frac{y}{x}$$

La ecuación que satiface la familia ortogonal es:

$$y' = \frac{-1}{2\frac{y}{x}} = -\frac{x}{2y}$$

Ejemplo 1 (Continuación.)

Resolvemos esta ecuación de variables separables:

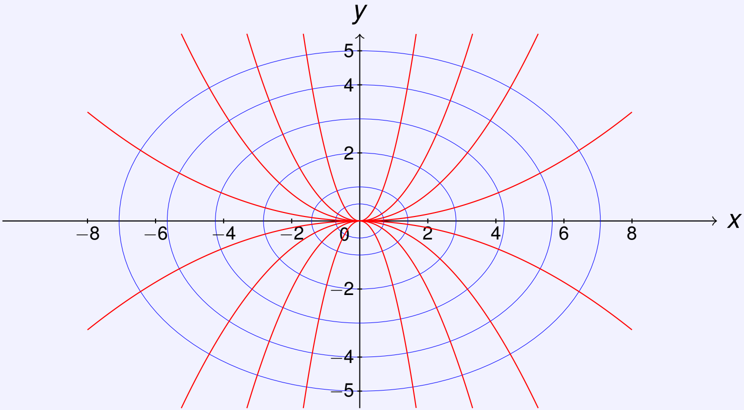
$$y' = -\frac{x}{2y}$$

$$\begin{aligned} 2y\,dy &= -x\,dx \\ y^2 &= -\frac{1}{2}x^2 + C \end{aligned}$$

La familia ortogonal son las elipses

$$\boxed{y^2 + \tfrac{1}{2}x^2 = C}. \quad \square$$

Ejemplo 1



Gráfica de las elipse $\frac{x^2}{2} + y^2 = C$.

Gráfica de las parábolas $y = Cx^2$.

Ejemplo 2

Halle la familia de trayectorias ortogonales a las exponenciales

$$y = Ce^x.$$

Derivando obtenemos:

$$y' = Ce^x$$
$$y' = y$$

La ecuación que satiface la familia ortogonal es:

$$y' = \frac{-1}{y}$$

Ejemplo 2 (Continuación.)

Resolvemos esta ecuación:

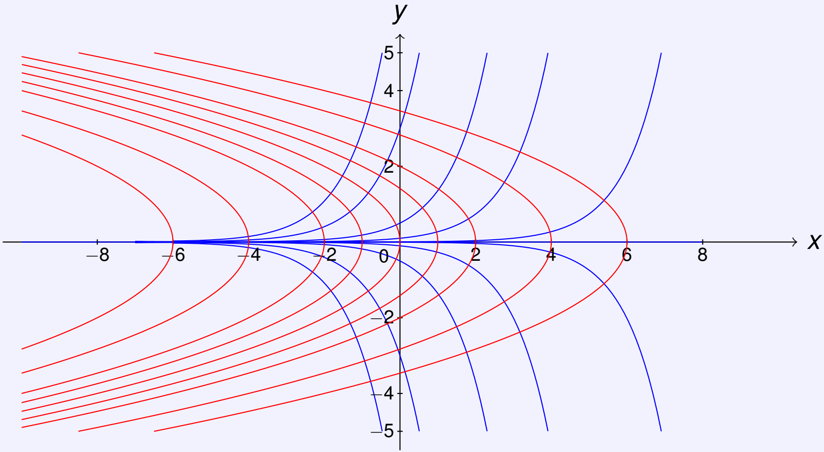
$$y' = -\frac{1}{y}$$

$$ydy = -dx$$
$$\frac{1}{2}y^2 = -x + C$$

La familia ortogonal son las parábolas

$$\boxed{x = C - \tfrac{1}{2}y^2}. \quad \square$$

Ejemplo 2



Gráfica de las exponenciales $y = Ce^x$.

Gráfica de las parábolas $\frac{1}{2}y^2 = -x + C$.

Ejemplo 3

Halle la familia de trayectorias ortogonales a la familia de círculos

$$y^2 + x^2 = 2Cx.$$

Derivando obtenemos:

$$\begin{aligned} 2yy' + 2x &= 2C \\ y^2 + x^2 &= (2yy' + 2x)x \\ 2xyy' &= y^2 - x^2 \\ y' &= \frac{y^2 - x^2}{2xy} \end{aligned}$$

La ecuación que satiface la familia ortogonal es:

$$y' = \frac{-1}{\frac{y^2 - x^2}{2xy}} = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$$

Ejemplo 3 (Continuación.)

Resolvemos esta ecuación homogenea:

$$y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2} = \frac{2\frac{y}{x}}{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

Hacemos el cambio: $y = zx$ donde $y' = z + xz'$.

$$\begin{aligned}
z + xz' &= \frac{2z}{1 - z^2} \\
xz' &= \frac{z^3 + z}{1 - z^2} \\
\frac{1 - z^2}{z^3 + z} dz &= \frac{1}{x} dx \\
\left(\frac{1}{z} - \frac{2z}{z^2 + 1}\right) dz &= \frac{dx}{x} \\
\ln(z) - \ln(z^2 + 1) &= \ln(Ax)
\end{aligned}$$

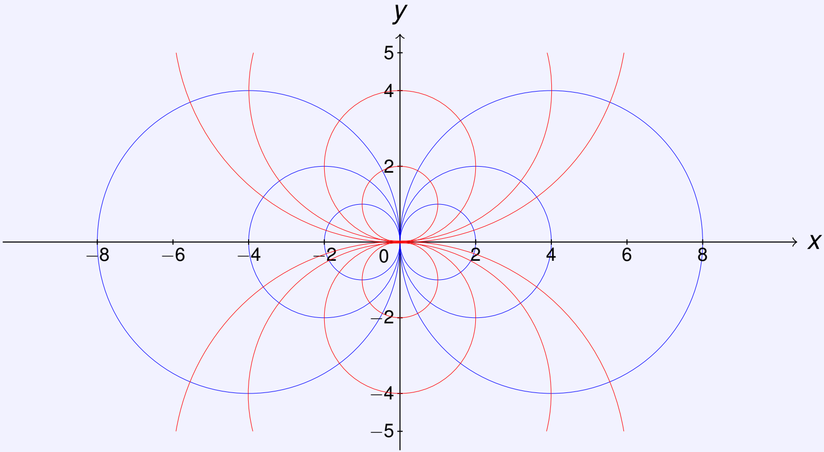
Ejemplo 3 (Continuación.)

$$\ln(z) - \ln(z^2+1) = \ln(Ax)$$
$$\ln\left(\frac{z}{z^2+1}\right) = \ln(Ax)$$
$$\frac{z}{z^2+1} = Ax$$
$$\frac{\frac{y}{x}}{\left(\frac{y}{x}\right)^2+1} = Ax$$
$$\frac{y}{y^2+x^2} = A$$
$$2By = y^2+x^2$$

La familia ortogonal son las circunferencias

$$\boxed{x^2+(y-B)^2 = B^2}. \qquad \square$$

Ejemplo 3



Gráfica de las circunferencias $x^2 + y^2 = 2Cx$.
Gráfica de las circunferencias $x^2 + y^2 = 2By$.

Ejemplo 4

Halle la familia de trayectorias ortogonales a la familia de curvas.

$$y + x = Ce^y.$$

Derivando obtenemos:

$$\begin{aligned} y' + 1 &= Ce^y y' \\ y' + 1 &= (y + x)y' \\ 1 &= (y + x - 1)y' \\ y' &= \frac{1}{y + x - 1} \end{aligned}$$

La ecuación que satiface la familia ortogonal es:

$$y' = 1 - y - x$$

Ejemplo 4 (Continuación.)

Resolvemos esta ecuación diferencial:

$$y' = 1 - y - x$$

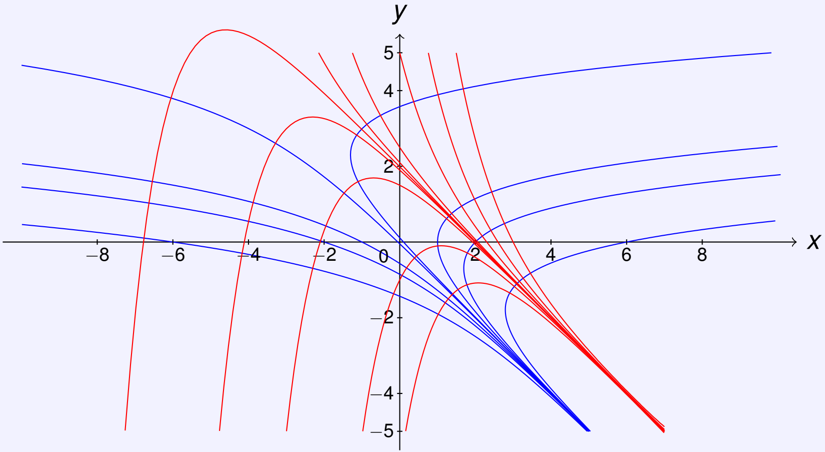
Hacemos el cambio: $u = x + y$ donde $u' = 1 + y'$.

$$\begin{aligned} u' - 1 &= 1 - u \\ u' &= 2 - u \\ \frac{1}{2-u}du &= dx \\ -\ln(2-u) &= x + A \\ \ln(2-x-y) &= -x + B \\ 2 - x - y &= Ce^{-x} \end{aligned}$$

La familia ortogonal son las curvas

$$\boxed{y = 2 - x - Ce^{-x}}. \quad \square$$

Ejemplo 4



Gráfica de las curvas $x + y = Ce^{y}$.
Gráfica de las curvas $y = 2 - x + Ce^{-x}$.

Ejemplo 5

Halle la familia de trayectorias ortogonales a la familia de curvas.

$$y^2 = Cx^3.$$

Derivando obtenemos:

$$2yy' = 3Cx^2$$

$$2yy' = 3\frac{y^2}{x^3}x^2$$

$$2yy' = 3\frac{y^2}{x}$$

$$y' = \frac{3y^2}{2xy} = \frac{3y}{2x}$$

La ecuación que satiface la familia ortogonal es:

$$y' = -\frac{2x}{3y}$$

Ejemplo 5 (Continuación.)

Resolvemos esta ecuación diferencial:

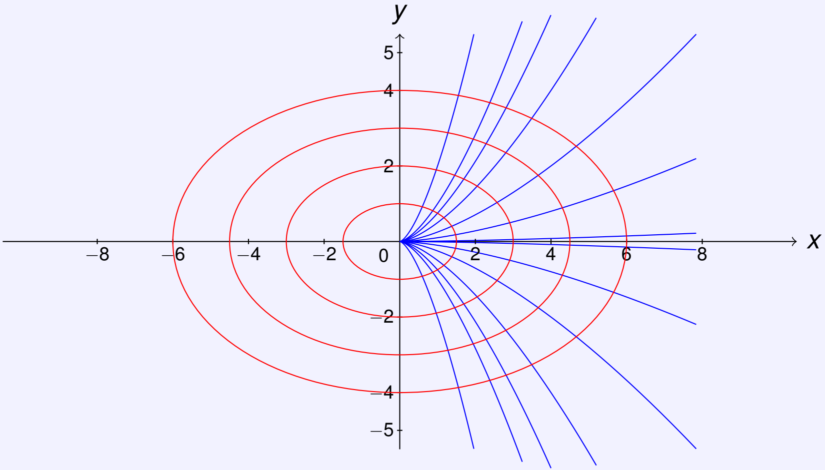
$$y' = -\frac{2x}{3y}$$

$$\begin{aligned} 3y\,dy &= -2x\,dx \\ \frac{3}{2}y^2 &= -x^2 + C \\ 3y^2 + 2x^2 &= C \end{aligned}$$

La familia ortogonal son las curvas

$$\boxed{3y^2 + 2x^2 = C}. \qquad \square$$

Ejemplo 5



Gráfica de las curvas $y^2 = Cx^3$.

Gráfica de las curvas $3y^2 + 2x^2 = C$.

Ejemplo 6

Halle la familia de trayectorias ortogonales a la familia de curvas.

$$y = \ln(ax) \textit{ para } a > 0.$$

Derivando obtenemos:

$$y' = \frac{1}{x}$$

La ecuación que satiface la familia ortogonal es:

$$y' = -x$$

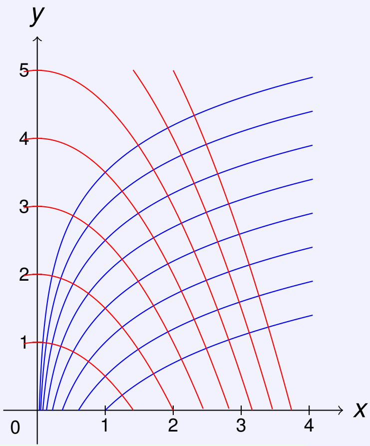
Resolviendo esta ecuación diferencial obtenemos,

$$y = -\frac{1}{2}x^2 + C$$

La familia ortogonal son las curvas

$$\boxed{y = -\tfrac{1}{2}x^2 + C}. \quad \square$$

Ejemplo 6



Gráfica de las curvas $y = \ln(ax)$.
Gráfica de las curvas $y = -\frac{x^2}{2} + C$.

FIN